



黄冈学习网
www.hgxxw.net

一元二次方程的根与系数的关系

1、一元二次方程的根的个数与判别式的关系的探究

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)，用配方法可以将其变形为

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

因为 $a \neq 0$ ，所以， $4a^2 > 0$ 。

由此可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的情况可以由 b^2-4ac 来判定，我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式，通常用符号“ Δ ”来表示。

综上所述，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$

($a \neq 0$)，有：

(1) 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ;$$

(2) 当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} ;$$

(3) 当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根。

2、一元二次方程的根与系数的关系的探究



若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 有两个实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

则有 $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

所以，一元二次方程的根与系数之间存在下列关系：



如果 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的两根分别

是 x_1 、 x_2 , 那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

这一关系也被称为韦达定理.

特别地, 对于二次项系数为1的一元二次方程 $x^2+px+q=0$, 若 x_1, x_2 是其两根, 由根和系数的关系可得:

$p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$, 方程 $x^2+px+q=0$ 可化为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.



因此以两个数 x_1, x_2 为根的一元二次方程
(二次项系数为1) 是 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$.

若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的
两根, 则由根和系数的关系有

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

故 $ax^2 + bx + c$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \right]$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$



例1、已知方程 $2x^2+kx-9=0$ 的一个根是
-3, 求另一根及 k 的值.



例2、设方程 $4x^2 - 7x + 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

不解方程, 求下列各式的值:

(1) $x_1^2 + x_2^2$

(2) $|x_1 - x_2|$

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$



例3、若 x_1, x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个不等根，求方程 $qx^2+px+1=0$ 的根。

课后练习

1、若关于 x 的方程 $(m^2-2)x^2 - (m-2)x + 1 = 0$ 的两个根互为倒数，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.



2、设 x_1, x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两根，

利用根与系数关系求下列各式的值：

$$(1)(x_1+1)(x_2+1)$$



2、设 x_1, x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两根,

利用根与系数关系求下列各式的值:

$$(2) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$



2、设 x_1, x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两根，

利用根与系数关系求下列各式的值：

$$(3)x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1$$



3、已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$ (k 为实数)的两实根, 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的最小值.



黄冈学习网
www.hgxxw.net