



黄冈学习网
www.hgxxw.net

一元二次不等式的解法

一元二次不等式的定义：含有一个未知数，且未知数的最高次数是二次的不等式叫一元二次不等式.它的一般形式为： $ax^2+bx+c>0$ ，或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$.

说明：一元二次不等式一般表达形式的左边，恰是关于自变量 x 的二次函数的解析式，即 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.



1、一元二次不等式的解法的探讨

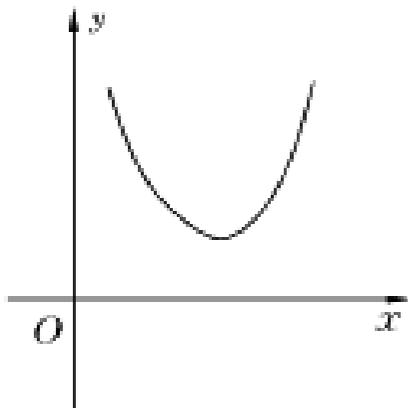
当 $a>0$ 时，解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$

首先，不妨记 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 。

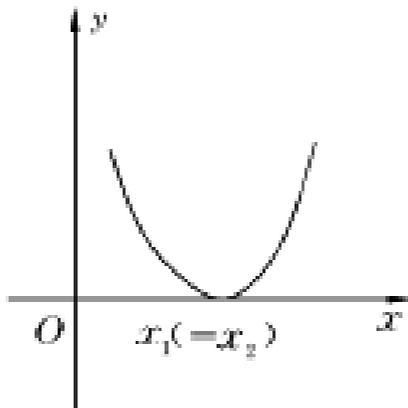
(1)计算 $\Delta=b^2-4ac$ ，判断抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与 x 轴交点的情况。

(2)若 $\Delta\geq 0$ ，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ，得两根为 $x_1, x_2, (x_1\leq x_2)$ 。

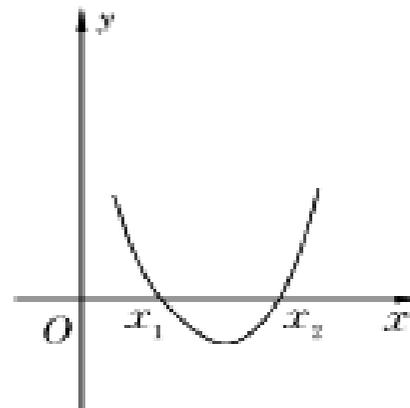
(3)结合(1)(2)画出 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象。



($\Delta < 0$)



($\Delta = 0$)



($\Delta > 0$)

(4)解不等式 $ax^2+bx+c>0$ ，就相当于使 $y>0$ 。考虑图像在 x 轴上方的部分，即 $y>0$ 时相应的 x 的范围就是 $ax^2+bx+c>0$ 的解。

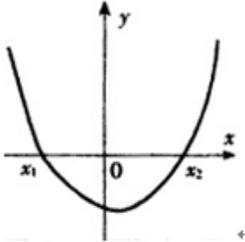
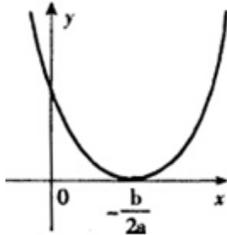
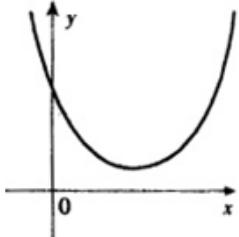
解不等式 $ax^2+bx+c<0$ ，就相当于使 $y<0$ 。考虑图像在 x 轴下方的部分，即 $y<0$ 时相应的 x 的范围就是 $ax^2+bx+c<0$ 的解。

2、一元二次不等式的解集的情况

根据上述内容，我们可以结合图像写出一元二次不等式的解集（二次项的系数为正数）。

若 $a < 0$ 时，可以先将二次项系数化成正数，对照下表情况求解。



$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	\emptyset
$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	\mathbb{R}
$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

3、解一元二次不等式的步骤

第一步:将二次项系数 a 转化为正数;

第二步:因式分解或利用求根公式得一元二次不等式所在方程两根(若无根直接到第三步);

第三步:利用开口向上的二次函数图像或直接根据不等式的不等号写解集(可化为一元一次不等式组来解,但此法较繁).

例、解下列不等式：

$$(1) 3x^2 - 7x + 2 < 0$$

$$(2) -6x^2 - x + 2 \leq 0$$



例、解下列不等式：

$$(3) 4x^2 + 4x + 1 < 0$$

$$(4) x^2 - 3x + 5 > 0$$

练习：解下列不等式：

(1) $x^2 - 4 < 0$

(2) $3x^2 - 2x + 1 < 0$

练习：解下列不等式：

$$(3) 5 + 3x - 2x^2 \geq 0$$

$$(4) 9x^2 - 12x > -4$$



课后练习

解下列不等式：

(1) $-x^2 - 7x + 8 < 0$

(2) $-6x^2 - 7x + 3 \leq 0$



解下列不等式：

$$(3)x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$(4)2x^2 - 11x + 5 > 0$$

解下列不等式：

(5) $x^2 + 4x + 7 > 0$

(6) $3x^2 + 4x + 1 \leq 0$



黄冈学习网
www.hgxxw.net