



黄冈学习网  
www.hgxxw.net

# 等差数列及其前 $n$ 项和

## 1. 等差数列的概念

(1)定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列。这个常数叫作等差数列的公差，通常用 $d$ 表示，其符号语言为 $a_n - a_{n-1} = d$  ( $n \geq 2$ ,  $d$ 为常数)。

(2)如果三个数 $a$ ,  $A$ ,  $b$ 成等差数列，则 $A$ 叫作 $a$ 与 $b$ 的等差中项，其中 $A = \frac{a+b}{2}$ 。

## 2. 等差数列的通项公式与前 $n$ 项和公式

(1)若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1$ ，公差是 $d$ ，则其通项公式

为 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ;

若等差数列 $\{a_n\}$ 的第 $m$ 项为 $a_m$ ，则其第 $n$ 项 $a_n$ 可以表示为

$a_n = a_m + (n-m)d$ .

(2)等差数列的前 $n$ 项和公式  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ .

### 3. 等差数列的性质

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和。

(1)若 $m+n=p+q$  ( $m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$ )，则有 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 。

(2)等差数列 $\{a_n\}$ 的单调性：当 $d > 0$ 时， $\{a_n\}$ 是递增数列；当 $d < 0$ 时， $\{a_n\}$ 是递减数列；当 $d = 0$ 时， $\{a_n\}$ 是常数列。

(3) $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, \dots$ 仍是等差数列，公差为 $kd$ 。

(4)数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 成等差数列，公差为 $m^2d$ 。

## 4. 等差数列与函数的关系

(1)等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可写成 $a_n = dn + (a_1 - d)$ , 当 $d \neq 0$ 时, 它是关于 $n$ 的一次函数, 它的图像是直线 $y = dx + (a_1 - d)$ 上横坐标为正整数的均匀分布的一群孤立的点; 当 $d = 0$ 时,  $a_n = a_1$ , 它是常数函数.

(2)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和公式可变形为

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ , 当 $d \neq 0$ 时, 它是关于 $n$ 的常数项为0

的一元二次函数, 它的图像是抛物线  $y = \frac{d}{2}x^2 + (a_1 - \frac{d}{2})x$

上横坐标为正整数的均匀分布的一群孤立的点.

## 问题一：等差数列的函数特征



例1、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=20$ ，前 $n$ 项和记为 $S_n$ ，满足 $S_{10}=S_{15}$ 。求 $n$ 取何值时， $S_n$ 取得最大值，并求出最大值。

## 问题二：等差数列的判断与证明

例2、设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，已知

$$a_1 = 1, \frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1)求 $a_2$ 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.





黄冈学习网  
[www.hgxxw.net](http://www.hgxxw.net)

### 问题三：等差数列的基本量的运算

例3、设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ，若 $S_{m-1} = -2$ ，

$S_m = 0$ ， $S_{m+1} = 3$ ，则 $m = ( \quad )$

A. 3

B. 4

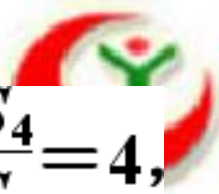
C. 5

D. 6



## 问题四：等差数列的性质的应用

例4、已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_n$ 为其前 $n$ 项和，  
若 $S_9=27$ ，则 $a_2-3a_4$ 等于\_\_\_\_\_.



例 5、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $\frac{S_4}{S_2}=4$ ，

则  $\frac{S_6}{S_4}=(\quad)$

A.  $\frac{9}{4}$

B.  $\frac{3}{2}$

C.  $\frac{5}{3}$

D. 4



黄冈学习网  
[www.hgxxw.net](http://www.hgxxw.net)