等比数列及其前n项和

1．等比数列的概念

(1)定义：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列．这个常数叫作等比数列的公比,通常用*q*表示,其符号语言为 $q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ **(*n*≥2，*q*为常数)．**

(2)如果三个数*a*，*G*，*b*成等比数列，则*G*叫作*a*与*b*的等比中项，其中 $G=\pm\sqrt{ab}$.

2．等比数列的通项公式与前n项和公式

(1)若等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比是q，则其通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$；若等比数列$\{a_n\}$的第m项为a_m，则其第n项a_n可以表示为$a_n=a_mq^{n-m}$.

(2)等比数列的前n项和公式：当$q=1$时，$S_n=na_1$；

当$q\neq1$时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

3．等比数列的性质

已知$\{a_n\}$是等比数列，公比为q，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和．

(1)若$m+n=p+q(m，n，p，q\in \mathbf{N}^*)$，则有$a_ma_n=a_pa_q$．

(2)等比数列$\{a_n\}$的单调性：

当$q>1$，$a_1>0$或$0<q<1$，$a_1<0$时，数列$\{a_n\}$是递增数列；

当$q>1$，$a_1<0$或$0<q<1$，$a_1>0$时，数列$\{a_n\}$是递减数列；

当$q=1$时，数列$\{a_n\}$是常数列．

(3)a_m，a_{m+k}，a_{m+2k}，…仍是等比数列，公比为q^k．

(4)若公比$q\neq 1$，则数列S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…成等比数列，公比为q^m．

4．等比数列与函数的关系

等比数列$\{a_n\}$的通项公式可写成$a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，当$q>0$，且$q\neq1$时，函数 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$是一个不为零的常数$\frac{a_1}{q}$与指数函数q^x的乘积，它的图像是函数 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x$ 的图像上横坐标为正整数的一群孤立的点；当$q=1$时，$a_n=a_1$，它是常数函数．

问题一：等比数列的函数特征

例1、已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=9\cdot 2^{n-1}$，$n\in\mathbb{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

问题一：等比数列的函数特征

例1、已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=9\cdot 2^{n-1}$，$n\in \mathbf{N}^*$.

(2)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若不等式$S_n>ka_n-2$对一切$n\in \mathbf{N}^*$恒成立，求实数k的取值范围.

问题二：等比数列的判断与证明

例2、已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，点$(a_n，a_{n+1})$在函数$y=3x+2$的图像上$(n\in N^*)$.

(1)证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

问题二：等比数列的判断与证明

例2、已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，点$(a_n，a_{n+1})$在函数$y=3x+2$的图像上$(n\in N^*)$.

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和.

问题三：等比数列的基本量的运算

例 3、已知等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=2$，前 n 项和为 S_n，

若 $S_3=\frac{7}{2}$，则 S_6 等于(　　)

A. $\frac{31}{2}$　　B. $\frac{63}{2}$　　C. 63　　D. $\frac{127}{2}$

问题四：等比数列的性质的应用

例4、公比为 $\sqrt[3]{2}$ 的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且 $a_3a_{11}=16$，则$\log_2 a_{16}=($　　$)$

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

例5、已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_2=6$，

$S_4=30$，则$S_6=$________.