数列求和

1．公式法

(1)直接利用等差数列、等比数列的前n项和公式求和.

(2)一些常见的数列的前n项和：

①$1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

②$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$;

③$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

2．分组求和法：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减.

3．裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和.

常用的裂项公式：

①$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

②$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

③$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

4．错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前n项和即可用错位相减法求得．

5．倒序相加法：如果一个数列$\{a_n\}$，首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前n项和即可用倒序相加法求得．

一、分组转化法求和

例1、已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，

$a_1=2$，且a_2，a_3，a_4+1成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

一、分组转化法求和

例1、已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，

$a_1=2$，且a_2，a_3，a_4+1成等比数列.

(2)设$b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

二、裂项相消法求和

例2、已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=0$，$S_5=-5$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

二、裂项相消法求和

例2、已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=0$，$S_5=-5$.

(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$的前$n$项和.

三、错位相减法求和

例3、设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

三、错位相减法求和

例3、设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$.

(2)设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且 $T_n+\frac{a_n+1}{2^n}=\lambda$ (λ为常数)，令$c_n=b_{2n}(n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前n项和R_n.

四、倒序相加法求和

例4、设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且对任意$n \in \mathrm{N}_+$都有$a_n>0$，满足$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

四、倒序相加法求和

例4、设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且对任意$n\in \mathrm{N}_{+}$都有$a_n>0$，满足$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$.

(2)当$0<\lambda<1$时，设 $b_n=(1-\lambda)(a_n+\frac{1}{2}),c_n=\lambda(a_n+1)$数列$\{\frac{1}{b_nc_n}\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n>\frac{9n-1}{4n+3}$.