



黄冈学习网
www.hgxxw.net

函数的奇偶性及周期性

考点梳理

1. 函数奇偶性的定义

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A ，如果对于任意的 $x \in A$ ，都有_____，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意的 $x \in A$ 都有_____，则称 $f(x)$ 为偶函数。

2. 奇偶函数的性质

(1) $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

$f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) = f(|x|) \Leftrightarrow f(x) - f(-x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于 轴对称 ; $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的图象关于 对称 .

(3) 奇函数在对称的单调区间内有相同的单调性 ; 偶函数在对称的单调区间内有 的单调性 .

3. 函数的周期性

(1)定义：如果存在一个非零常数 T ，使得对于函数定义域内的任意 x ，都有 $f(x + T) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，则称 $f(x)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 函数，其中 T 称作 $f(x)$ 的周期。若 T 存在一个最小的正数，则称它为 $f(x)$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)性质：① $f(x + T) = f(x)$ 常常写作 $f(x + \frac{T}{2}) = f(x - \frac{T}{2})$.

②如果 T 是函数 $y = f(x)$ 的周期，则 kT ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$)也是 $y = f(x)$ 的周期，即 $f(x + kT) = f(x)$.

③若对于函数 $f(x)$ 的定义域内任一个自变量的值 x 都有 $f(x + a) = -f(x)$ 或 $f(x + a) = \frac{1}{f(x)}$ 或 $f(x + a) = -\frac{1}{f(x)}$ (a 是常数且 $a \neq 0$)，则 $f(x)$ 是以_____为一个周期的周期函数 .



题型一 函数奇偶性的判定

例1、判断下列函数的奇偶性。

$$(1) f(x) = \sqrt{3-x^2} + \sqrt{x^2-3};$$

$$(2) f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}.$$

【思考归纳】



- 判定函数奇偶性的常用定义法，步骤：（1）判断函数的定义域是否关于原点对称；（2）对 $f(x)$ 等价化简变形；（3）看 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系；（4）下结论；以及图象法，看 $f(x)$ 图像是关于 x 轴或 y 轴对称，还有性质法。

题型二 函数奇偶性的应用



例2、(1)已知定义域为R的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$

是奇函数，则 $a =$ _____ , $b =$ _____ .

(2)已知 $y = f(x)$ 是定义在R上的偶函数，当 $x \geq 0$ 时，

$f(x) = x^2 - 2x$ ，则 $f(x)$ 在R上的解析式为_____ .

(3) 已知 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增



函数，如果 $f(ax + 1) \leq f(x - 2)$ 在 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为_____。

【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 1. 已知函数的奇偶性求函数的解析式，往往要抓住奇偶性讨论函数在各个分区间上的解析式，或充分利用奇偶性产生关于 $f(x)$ 的方程，从而可得 $f(x)$ 的解析式.
- 2. 已知带有字母参数的函数的表达式及奇偶性求参数，常常采用待定系数法：利用 $f(x) \pm f(-x) = 0$ 产生关于字母的恒等式，由系数的对等性可得知字母的值.
- 3. 奇偶性与单调性综合时要注意奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同，偶函数在关于原点对称的区间上的单调性相反.
- 4. 若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

题型三 函数周期性的应用

例3、(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数，
且 $f(x+3)f(x) = -1$ ， $f(-4) = 2$ ，则 $f(2014) =$ _____.

(2) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ，若 $f(1) = 2014$ ，则
 $f(103) =$ _____.

【思考归纳】



- 抽象函数的周期需要根据给出的函数式子求出，常见的有以下几种情形：
- (1)若函数满足 $f(x+T)=f(x)$ ，由函数周期性的定义可知 T 是函数的一个周期；
- (2)若满足 $f(x+a)=-f(x)$ ； $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ； $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ ，则 $2a$ 是函数的一个周期；
- (3)如果 T 是函数 $y=f(x)$ 的周期，则① $kT(k\in\mathbb{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 也是 $y=f(x)$ 的周期，即 $f(x+kT)=f(x)$ ；②若已知区间 $[m, n](m<n)$ 的图象，则可画出区间 $[m+kT, n+kT](k\in\mathbb{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 上的图象。

题型四 函数性质的综合应用

例4、已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x - 4) = -f(x)$ ，且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数，则()

A . $f(-25) < f(11) < f(80)$

B . $f(80) < f(11) < f(-25)$

C . $f(11) < f(80) < f(-25)$

D . $f(-25) < f(80) < f(11)$

【思考归纳】



- 函数的奇偶性、单调性、周期性是函数的三大性质，它们之间既有区别又有联系，周期性起到转换自变量值的作用，奇偶性起到调节符号作用，而函数的单调性体现的是函数值随自变量变化而变化的规律，因此，在解题时，往往需借助函数的奇偶性或周期性来确定函数在另一区间上的单调性，即实现区间的转换，再利用单调性来解决相关问题. 而解决抽象函数问题，根据函数的奇偶性、周期性、单调性等性质，画出函数的一部分简图，使抽象问题变得直观、形象，有利于问题的解决.

课后练习

1. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数，在区间 $[0, +\infty)$ 上为增函数，且 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ ，则不等式 $f\left(\log_{\frac{1}{8}} x\right) > 0$ 的解集为()

A. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

B. $(2, +\infty)$

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

2. 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x - 4) = -f(x)$ ，且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数．若方程 $f(x) = m (m > 0)$ 在区间 $[-8, 8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ _____．

3. 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数， $g(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数，且 $g(x) = f(x - 1)$ ，若 $f(2) = 2$ ，则 $f(2010)$ 的值为_____．

4. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的偶函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 4x$ ，那么，不等式 $f(x + 2) < 5$ 的解集是_____．



5. 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数，且对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒有 $f(x+1) = f(x-1)$ ，已知当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ ，则：

- ① 2 是函数 $f(x)$ 的周期；
- ② 函数 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上递减，在 $(2, 3)$ 上递增；
- ③ 函数 $f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 0；
- ④ 当 $x \in (3, 4)$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 。

其中所有正确命题的序号是_____。



黄冈学习网
www.hgxxw.net