



黄冈学习网
www.hgxxw.net

函数与方程

考点梳理

1. 函数的零点

(1) 函数零点的定义：

对于函数 $y = f(x) (x \in D)$ ，把使_____成立的实数 x 叫做函数 $y = f(x) (x \in D)$ 的零点。

(2) 几个等价关系：

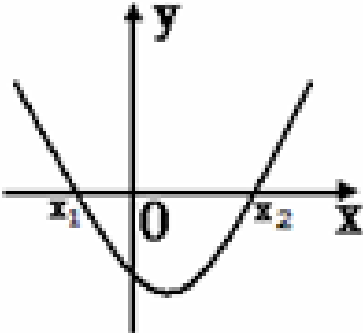
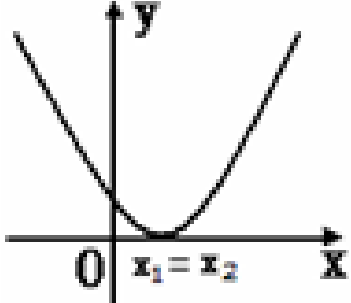
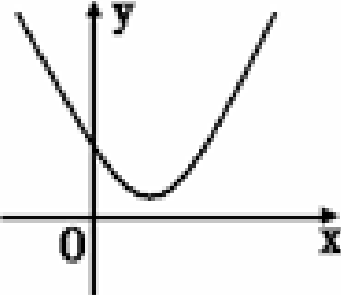
方程 $f(x) = 0$ 有实数根 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 的图象与_____有交点 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x)$ 有_____。



(3) 函数零点的判定 (零点存在性定理) :

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a , b]$ 上的图象是连续不断的
一条曲线, 并且有 _____, 那么函数 $y = f(x)$ 在区间
_____ 内有零点, 即存在 $c \in (a , b)$, 使得 _____, 这个 c 也
就是 $f(x) = 0$ 的根 .

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象与零点的关系

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	方程无实数根
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)			
与x轴的交点			
零点个数			

3. 二分法

(1) 二分法的定义：

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断且_____的函数 $y = f(x)$ ，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间_____，使区间的两个端点逐步逼近_____，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

(2)用二分法求函数 $f(x)$ 零点近似值的步骤

第一步，确定区间 $[a, b]$ ，验证_____，给定精确度 ε ；

第二步，求区间 (a, b) 的中点 x_1 ；

第三步，计算 $f(x_1)$ ；

①若 $f(x_1) = 0$ ，则 x_1 就是函数的零点；

②若_____，则令 $b = x_1$ （此时零点 $x_0 \in (a, x_1)$ ）；

③若_____，则令 $a = x_1$ （此时零点 $x_0 \in (x_1, b)$ ）；

第四步，判断是否达到精确度 ε ；即若 $|a - b| < \varepsilon$ ，则得到零点近似值 a （或 b ）；

否则重复第二、第三、第四步。

题型一 函数零点与零点个数的判断

例1、(1) 设 x_0 是方程 $\ln x + x = 4$ 的解，则 x_0 属于()

- A . (0,1) B . (1,2) C . (2,3) D . (3,4)

(2) 函数 $f(x) = 2^x + x^3 - 2$ 在区间(0,1)内的零点个数是()

- A . 0 B . 1 C . 2 D . 3

(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x - x^2 + 2x, & x > 0, \\ 4x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$

的零点个数是_____.



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



- 函数零点个数的判断方法：
 - (1)直接求零点：令 $f(x)=0$ ，如果能求出解，则有几个解就有几个零点；
 - (2)零点存在性定理：利用定理不仅要求函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a)f(b)<0$ ，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点；
 - (3)利用图象交点的个数：画出两个函数的图象，看其交点的个数，其中交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点。

题型二 二分法及其应用

例2—1、若函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ 的一个正数零点附近的函数值用二分法计算，其参考数据如下：

$f(1) = -2$	$f(1.5) = 0.625$	$f(1.25) = -0.984$
$f(1.375) = -0.260$	$f(1.4375) = 0.162$	$f(1.40625) = -0.054$

则方程 $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ 的一个近似根为_____.

例2—2、用二分法求方程 $\ln x = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上的近似值，取中点 $c = 1.5$ ，则下一个根区间是_____.

【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 用二分法求函数零点近似值的口诀为：定区间，找中点，中值计算两边看。同号去，异号算，零点落在异号间。周而复始怎么办？精确度上来判断。



题型三 函数零点性质的应用

例3 - 1、 (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x < 2, \\ \frac{3}{x-1}, & x \geq 2, \end{cases}$ 若方程 $f(x) - a = 0$ 有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是()

- A . (1,3) B . (0,3) C . (0,2) D . (0,1)



例3 - 2、 设 $f(x) = \log_2(2^x + 1)$, $g(x) = \log_2(2^x - 1)$,

若关于 x 的函数 $F(x) = g(x) - f(x) - m$ 在 $[1,2]$ 上有零

点 , 求 m 的取值范围 .

【思考归纳】



- 已知函数有零点(方程有根)求参数取值常用的方法
- (1)直接法：直接根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围.
- (2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数值域问题加以解决.
- (3)数形结合法：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图象，然后数形结合求解.

题型四 与二次函数有关的零点问题



黄冈学习网
www.hgxxw.net

例4、(1) m 为何值时, $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$.

①有且仅有一个零点?

②有两个零点且均比 -1 大?

(2)若函数 $f(x) = |4x - x^2| + a$ 有4个零点, 求实数 a 的取值范围.

【思考归纳】



- 与二次函数有关的零点问题，常借助于二次函数的图象数形结合来解，一般从（1）开口方向；（2）端点函数值符号；（3）对称轴位置；（4）判别式四个方面分析。

课后练习



1. 函数 $f(x) = \log_2 x - \frac{1}{x}$ 的零点所在区间为()

A . $(0, \frac{1}{2})$

B . $(\frac{1}{2}, 1)$

C . $(1, 2)$

D . $(2, 3)$



2. 用二分法求函数 $f(x) = 3^x - x - 4$ 的一个零点,

其参考数据如下:

$f(1.600\ 0) = 0.200$	$f(1.587\ 5) = 0.133$	$f(1.575\ 0) = 0.067$
$f(1.562\ 5) = 0.003$	$f(1.556\ 2) = -0.029$	$f(1.550\ 0) = -0.060$

据此数据, 可得 $f(x) = 3^x - x - 4$ 的一个零点的近似值(精确到0.01) 为_____.



3. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[2.9] = 2$ ，

$[-4.1] = -5$ ，已知 $f(x) = x - [x](x \in \mathbb{R})$ ， $g(x) = \log_4(x - 1)$ ，则

函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数是()

A . 1

B . 2

C . 3

D . 4

4. 若函数 $f(x) = ax^2 - x - 1$ 有且仅有一个零点，则实数 a 的取值为_____ .

5. 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|$, $x \in \mathbb{R}$. 若方程

$f(x) - a|x - 1| = 0$ 恰有4个互异的实数根, 则实数 a 的取值范围
为_____.

6. 已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为 -4 , 且关于 x 的不等式 $f(x) \leq 0$
的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x} - 4 \ln x$ 的零点个数.



黄冈学习网
www.hgxxw.net