变化率与导数、导数的计算

考点梳理

1.平均变化率

设函数$y=f(x)$在$x=x_0$处附近有定义，当自变量在$x=x_0$处有增量Δx ($\Delta x\in R$)时，则函数$y=f(x)$相应地有增量__________________，Δy与Δx的比__________________________叫函数的平均变化率.它的几何意义是过曲线$y=f(x)$上的点（x_0，$f(x_0)$）及点($x_0+\Delta x$，$f(x_0+\Delta x)$）的割线斜率.

2. 瞬时变化率

如果$\Delta x \to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于某个常数，我们把这个极限值叫做函数$y = f(x)$在$x \to x_0$处的瞬时变化率.它的几何意义是________________________

3. 导数

如果$\Delta x \to 0$时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于某个常数，我们把这个极限值叫做函数$y = f(x)$在$x \to x_0$处的瞬时变化率，又称为函数$y = f(x)$在$x = x_0$处的导数，记作____________________，即______________________________________，它的几何意义是______________________________________.

黄冈学习网
www.hgxxw.net

4. 常见八种函数的导数公式

①$C'=$________(C为常数)

②$(x^n)'=$________;

③$(\sin x)'=$________;

④$(\cos x)'=$________;

⑤$(\log_a x)'=$________;

⑥$(\ln x)'=$________;

⑦$(a^x)'=$________;

⑧$(e^x)'=$________;

5．导数的运算法则

①$(u\pm v)'=$______；　②$(uv)'=$______；　③$(\frac{u}{v})'=$______；

6．复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点x处有导数 $u'=\varphi'(x)$ ，函数$y=f(u)$在点x处的对应点u处有导数 $y_u'=f'(u)$ ，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$

在点x处有导数，且 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$ ，或写作 $f_x'(\varphi(x))=$______.

重点精讲

题型一 运用导数的定义求导数

例1、若函数$f(x)$在点x_0处可导，则

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ ____________

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2h}=$ ____________

【思考归纳】

1．根据导数的概念求函数的导数是求导的基本方法．确定 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数有两种方法：一是导数的定义法，二是导函数的函数值法．

2．求函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数的求解步骤：

求差 → $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

↓

求比 → $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

↓

求极限 → $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

题型二 利用求导公式、法则求导

例2、求下列函数的导数：

(1)$y=(2x-3)^2$；(2)$y=\tan x$；(3) $y=\sqrt{x^2+2x+5}$.

【思考归纳】

- 一般来说，分式函数求导，要先观察函数的结构特征，可化为整式函数或较为简单的分式函数的要先化简；对数函数的求导，可先化为和、差的形式；三角函数的求导，先利用三角函数公式转化为和或差的形式.

题型三 利用导数几何意义求曲线切线方程

例3、已知函数$f(x)=x^3-4x^2+5x-4$.

(1)求曲线$f(x)$在$x=2$处的切线方程；

(2)求经过点A(2，-2)的曲线$f(x)$的切线方程．

【思考归纳】

1．求曲线$y=f(x)$在$x=x_0$处的切线方程

(1)求出函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数$f'(x_0)$即为曲线$y=f(x)$在$x=x_0$处的切线斜率；

(2)由切点$(x_0，f(x_0))$和斜率$f'(x_0)$，用点斜式写出切线方程$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，再化为一般式即可．

特别地，如果曲线$y=f(x)$在点$(x_0，f(x_0))$处的切线垂直于x轴，则此时导数$f'(x_0)$不存在，由切线定义可知，切线方程为$x=x_0$.

2．求曲线$y=f(x)$过点$P(x_0，y_0)$的切线方程可设切点为$(x_1，y_1)$，由 $\begin{cases} y_1 = f(x_1), \\ y_0 - y_1 = f'(x_1)(x_0 - x_1) \end{cases}$ 解出x_1，进而确定过点P的切线方程为$y-y_0=f'(x_1)(x-x_0)$，再化为一般式即可．

3．“过某点”与“在某点处”的切线是不同的，过某点的切线，此点并不一定是切点，在某点处的切线才表明此点是切点．

题型四 导数几何意义的综合应用

例4、若存在过点(1，0)的直线与曲线$y=x^3$和$y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$都相切，则a等于(　　)

A．-1或-$\frac{25}{64}$

B．-1或$\frac{21}{4}$

C．-$\frac{7}{4}$或$-\frac{25}{64}$

D．-$\frac{7}{4}$或7

【思考归纳】

注意区分曲线某点处的切线和曲线过某点的切线.曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$; 当所给点不是切点时，无法与导数的几何意义联系，而必须设出切点；求过某点的切线方程,需先设出切点坐标,再依据已知点在切线上求解.

例5、设函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}$ ，曲线$y=f(x)$在点$(2，f(2))$处的切线方程为$7x-4y-12=0$.

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)证明：曲线$y=f(x)$上任一点处的切线与直线$x=0$和直线$y=x$所围成的三角形面积为定值，并求此定值.

【思考归纳】

- 解决与导数的几何意义有关的问题时，以下几点在备考时要高度关注：
- (1)首先确定已知点是否为曲线的切点是求解关键；
- (2)基本初等函数的导数和导数的运算法则要熟练掌握；
- (3)对于直线的方程与斜率公式的求解，要熟练掌握.

课后练习

1．已知$f'(2)=2$，$f(2)=3$，则$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}$的值为(　　)

A．1　　B．2

C．3　　D．4

2．已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)=2xf'(1)+x^2$，则$f'(1)=$(　　)

A．－1　　B．－2　　C．1　　D．2

3．已知函数$f(x)$在R上满足$f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$，则函数$y=f(x)$在$x=1$处的导数$f'(1)=$________.

4．已知$f_1(x)=\sin x+\cos x$，记$f_2(x)=f_1'(x)$，$f_3(x)=f_2'(x)$，…，$f_n(x)=f_{n-1}'(x)(n\in N^*，n\geq 2)$，

则 $f_1(\frac{\pi}{2})+f_2(\frac{\pi}{2})+\cdots+f_{2014}(\frac{\pi}{2})=$________________.

5.求下列函数的导数．

(1)$y=x^2\sin x$；(2) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$；(3)$y=\log_2(2x^2+3x+1)$．

6.设函数$f(x)=x^3+2ax^2+bx+a$，$g(x)=x^2-3x+2$，其中$x\in R$，a、b为常数，已知曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在点(2,0)处有相同的切线l.

(1)求a、b的值，并写出切线l的方程；

(2)若方程$f(x)+g(x)=mx$有三个互不相同的实根0、x_1、x_2，其中$x_1<x_2$，且对任意的$x\in[x_1，x_2]$，$f(x)+g(x)<m(x-1)$恒成立，求实数m的取值范围．