数列的概念与简单表示

考点梳理

1. 数列的概念

(1)数列是按一定__________排列的一列数，记作$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$，简记为__________.

(2)数列$\{a_n\}$的第n项a_n与项数n的关系若能用一个公式$a_n=f(n)$给出，则这个公式叫做这个数列的__________.

(3)数列可以看做定义域为N^*(或其子集）的函数，当自变量由小到大依次取值时，对应的一列函数值，它的图象是一群__________.

2. 数列的表示方法

数列的表示方法有：__________法、__________法、__________法（用通项公式表示）和____________法（用递推关系表示）.

3. 数列的分类

(1)按照数列的项数数列可分为_______数列和_______数列.

(2)按照任何一项的绝对值是否超过某一正常数，数列可分为_______数列和_______数列.

(3)从函数单调性角度考虑，数列可分为：递增数列、______数列、常数列和_______数列.

4. 数列的通项a_n与前n项和S_n的关系

(1)$S_n=a_1 + a_2 + a_3 + … + a_n$ ；

(2)a_n=________________________.

重点精讲

题型一 由数列的前几项求数列的通项公式

例1、写出下面各数列的一个通项公式：

(1)3,5,7,9，…；

(2) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\cdots;$

(3) $-1,\frac{3}{2},\ -\frac{1}{3},\frac{3}{4},-\frac{1}{5},\frac{3}{6},\ \cdots;$

(4)3,33,333,3333，….

【思考归纳】

- 根据数列的前若干项写出数列的一个通项公式，解决这一题型的关键是通过观察、分析、比较去发现项与项之间的关系，如果关系不明显，应该将项作适当变形或分解，让规律突现出来，便于找到通项公式；同时还要借助一些基本数列的通项及其特点.

题型二 数列的性质及应用

例2-1、已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$**，试判断此数列是否有最大项？若有，第几项最大，最大项是多少？若没有，说明理由．**

例2-2．数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (0\leqslant a_n<\frac{1}{2}),\\ 2a_n-1 & (\frac{1}{2}\leqslant a_n<1).\end{cases}$

若 $a_1=\frac{2}{5}$ **，则a_{2011}等于(　　)**

A．$\frac{1}{5}$　　**B．**$\frac{2}{5}$　　**C．**$\frac{3}{5}$　　**D．**$\frac{4}{5}$

【思考归纳】

1．数列的单调性：若$a_{n+1}>a_n$，则$\{a_n\}$为递增数列，若$a_{n+1}<a_n$，则$\{a_n\}$为递减数列，否则为摆动数列或常数列．

2．周期性：若$a_{n+k}=a_n$对$n\in N^*$(k为常数)成立，则$\{a_n\}$为周期数列．对于一些数列，若通项无法求出时，可考虑其周期性．

3．有界性：若$\{a_n\}$满足：$|a_n|<M$或$|a_n|\leq M$，则称$\{a_n\}$为有界数列，并能求出数列中的最大项或最小项．

题型三 有关数列的通项a_n与前n项和S_n的关系问题

例3、已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

(1)若$S_n=(-1)^{n+1}\cdot n$，求a_5+a_6及a_n；

(2)若$S_n=3^n+2n+1$，求a_n.

【思考归纳】

黄冈学习网 www.hgxxw.net

数列的前n项和S_n与a_n之间的关系如下：$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$

S_n-S_{n-1}是在$n\geq 2$的条件下成立的，若将$n=1$代入该式所得的值与S_1相等，则$\{a_n\}$的通项公式就可用统一的形式来表示，否则就写成上述分段数列的形式．

题型四　由递推公式求数列通项公式

例4．根据下列条件，求数列的通项公式a_n.

(1)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$；

(2)在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n, a_1=4$　；

(3)在数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 3$，$a_{n+1} = 2a_n + 1$；

【思考归纳】

已知数列的递推公式求通项，可把每相邻两项的关系列出来，抓住它们的特点进行适当处理，有时借助拆分或取倒数等方法构造等差数列或等比数列，转化为等差数列或等比数列的通项问题．

(1)已知a_1且$a_n-a_{n-1}=f(n)(n\geq 2)$，可以用“累加法”，即$a_n-a_{n-1}=f(n)$，$a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-1)$，…，$a_3-a_2=f(3)$，$a_2-a_1=f(2)$．所有等式左右两边分别相加，代入$a_1$得$a_n$．

(2)已知a_1且$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)(n\geq 2)$，可以用“累乘法”，

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n),\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-1),\cdots,\frac{a_3}{a_2}=f(x)$，所有等式左右两边分别相乘，代入$a_1$得$a_n$．

(3)形如$a_{n+1}=\mathrm{p}a_n+\mathrm{q}$，运用待定系数法构造等比等特殊数列求解；

(4)形如$a_{n+1}=\mathrm{A}a_n^2$，$a_{\mathrm{n}}>0$，采用两边取对数后，运用待定系数法构造等差或等比等特殊数列求解.

课后练习

1．数列 $0,\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7}$ ，…的一个通项公式为(　　)

A．$a_n=\frac{n-1}{n+1}(n\in N^*)$

B．$a_n=\frac{n-1}{2n+1}(n\in N^*)$

C．$a_n=\frac{2(n-1)}{2n-1}(n\in N^*)$

D．$a_n=\frac{2n}{2n+1}(n\in N^*)$

2. 已知$a_1=1$，$a_n=n(a_{n+1}-a_n)(n\in \mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是(　　)

A．$2n-1$　　　B. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}$

C．n^2　　　D．n

3.设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+3^2a_3+\ldots+3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________．

4.设函数f(x)定义如下表：

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	2	5	1

定义数列$\{a_n\}$：$a_0=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in N$.

(1)求$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots-a_{2010}+a_{2011}$；

(2)若$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1000$，求n的值．

5、已知数列$\{a_n\}$满足前n项和$S_n=n^2+1$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{2}{a_n+1}$，且前n项和为T_n，设$c_n=T_{2n+1}-T_n$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)判断数列$\{c_n\}$的增减性．