



黄冈学习网
www.hgxxw.net

等差数列

考点梳理

1. 等差数列的有关定义

(1)一般地，如果一个数列从第____项起，每一项与它的前一项的_____等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，用数学式子可表示为_____ ($n \in \mathbb{N}^*$, d 为常数)。

(2)数列 a, A, b 成等差数列的充要条件是_____, 其中 A 叫做 a, b 的_____。

2. 等差数列的有关公式

(1) 通项公式： $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$, $a_n = a_m + \underline{\hspace{2cm}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$) .

(2) 前 n 项和公式： $S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 等差数列的性质

(1) 等差数列的单调性：若公差 $d > 0$ ，则数列为___数列；

若 $d < 0$ ，则数列为_____数列；若 $d = 0$ ，则数列为_____数列.

(2) 若 $m + n = p + q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$)，则有_____，特别地，当 $m + n = 2p$ 时，有_____.

(3) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d ，则 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots$ ($k, m \in \mathbb{N}^*$)是公差为_____的等差数列.

(4) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列，则 $\{pa_n + qb_n\}$ 也是等差数列；

(5) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 也成等差数列，其首项与 $\{a_n\}$

首项相同，公差是 $\{a_n\}$ 公差的_____.

(6) S_m , S_{2m} , S_{3m} 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项 , 前 $2m$ 项 , 前 $3m$ 项的和 , S_m , $S_{2m} - S_m$, $S_{3m} - S_{2m}$ 成_____数列 .

4. 等差数列的最值

在等差数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 > 0$, $d < 0$, 则 S_n 存在最_____值 ; 若 $a_1 < 0$, $d > 0$, 则 S_n 存在最_____值.

重点精讲



黄冈学习网
www.hgxxw.net

题型一 等差数列的判定与证明

例1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{3}{5}, a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$),
数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2)求 a_n 的最大值和最小值 .



【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

证明一个数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的基本方法有两种：一是利用等差数列的定义法，即证明 $a_{n+1} - a_n = d (n \in \mathbb{N}^*)$ ，二是利用等差中项法，即证明： $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ 。在选择方法时，要根据题目条件的特点，如果能够求出数列的通项公式，则可以利用定义法，否则，可以利用等差中项法。

题型二 等差数列有关基本量的计算



例2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) 已知 $a_{15} = 33$ ， $a_{45} = 153$ ，求 a_{61} ；

(2) 已知 $S_8 = 48$ ， $S_{12} = 168$ ，求 a_1 和 d ；

(3) 已知 $a_6 = 10$ ， $S_5 = 5$ ，求 a_8 和 S_8 .

【思考归纳】



- 在等差数列的五个基本量 a_1 , d , a_n , S_n , n 中, “知三求二”是一种基本运算, 一般方法是利用通项公式和前 n 项和公式, 通过列方程组求解. a_1 和 d 是等差数列的两个基本量, 用它们表示已知和未知是常用方法. 判断是否是数列中的项的问题, 一般有两种解法: 一是对所要判断的式子进行变形, 看其是否与通项公式一致; 二是假设其是数列的项, 列出等式解出 n , 看所解出的 n 是否为正整数.

题型三 等差数列的性质及应用

例3、(1)若一个等差数列前3项的和为34，最后3项的和为146，且所有项的和为390，则这个数列的项数为()

A . 13

B . 12

C . 11

D . 10



(2) 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，

若 $a_1 = -2014$ ， $\frac{S_{2014}}{2014} - \frac{S_{2008}}{2008} = 6$ ，则 S_{2013} 等于()

A . 2013

B . - 2013

C . - 4026

D . 4026

(3) 设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n ,

若对任意自然数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-3}{4n-3}$, 则 $\frac{a_9}{b_5 + b_7} + \frac{a_3}{b_8 + b_4}$

的值为_____ .



【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列， S_n 是其前 n 项和，则有

(1) 若 $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ 。特别地，当 $m + n = 2p$ 时，有 $a_m + a_n = 2a_p$ 。

(2) $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \dots$ 仍是等差数列，公差为 kd 。

(3) 数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 也是等差数列；也成等差数列

(4) $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ ，若 n 为奇数，则 $S_{奇} - S_{偶} = a_{中}$ (中间项)。

题型四 等差数列中的最值问题



例4、在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 20$ ，前 n 项和为

S_n ，且 $S_{10} = S_{15}$ ，求当 n 取何值时， S_n 取得最大值，并求出它的最大值。

【思考归纳】



求解等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最值问题，主要有以下方法：

(1)二次函数法：将 S_n 看作关于 n 的二次函数，运用配方法，借助函数的单调性及数形结合，使问题得解；

(2)通项公式法： $a_1 > 0, d < 0$ 时，满足 $\begin{cases} a_m \geq 0 \\ a_{m+1} \leq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n

取得最大值为 S_m ；

$a_1 < 0, d > 0$ 时，满足 $\begin{cases} a_m \leq 0 \\ a_{m+1} \geq 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 S_n 取得最小值为 S_m 。

课后练习



1. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 如果 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_3 + a_6 + a_9 = 27$, 数列 $\{a_n\}$ 前9项的和为()

A . 297

B . 144

C . 99

D . 66

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{m-1} = -2$, $S_m = 0$, $S_{m+1} = 3$, 则 $m =$ ()

A . 3

B . 4

C . 5

D . 6

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，前 m 项的和为30，前 $2m$ 项的和为100，则前 $3m$ 项的和为_____。

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 > 0$ ， $a_{10} \cdot a_{11} < 0$ ，若此数列的前10项和 $S_{10} = 36$ ，前18项和 $S_{18} = 12$ ，则数列 $\{|a_n|\}$ 的前18项和 T_{18} 的值是（ ）

A . 24

B . 48

C . 60

D . 84

5. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$ ， $a_7 + a_{10} < 0$ ，则当 $n =$ _____时， $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大。

6. 已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_3 \cdot a_4 = 117$ ， $a_2 + a_5 = 22$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$ ，是否存在非零实数 c 使得 $\{b_n\}$ 为等差数列？若存在，求出 c 的值；若不存在，请说明理由。



黄冈学习网
www.hgxxw.net