数列的通项与求和

考点梳理

黄冈学习网 www.hgxxw.net

数列的求和方法

(1)公式法

直接利用等差数列、等比数列的前n项和公式求和

①等差数列的前n项和公式：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

②等比数列的前n项和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1, q=1, \\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\neq 1. \end{cases}$$

(2)倒序相加法

如果一个数列$\{a_n\}$的前n项中首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前n项和即可用倒序相加法，如等差数列的前n项和公式即是用此法推导的．

(3)错位相减法

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前n项和即可用此法来求，如等比数列的前n项和公式就是用此法推导的．

(4)裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和．

(5)分组转化求和法

一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减．

(6)并项求和法

一个数列的前n项和中，可两两结合求解，则称之为并项求和．形如$a_n=(-1)^n f(n)$类型，可采用两项合并求解．

重点精讲

题型一 分组转化法求和

例1、已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1a_2a_3\ldots a_n=(\sqrt{2})^{b_n}$ $(n\in N^*)$. 若$\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=2$，$b_3=6+b_2$.

(1)求a_n与b_n.

(2)设$c_n=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}(n\in\mathbb{N}^*)$ **．记数列{**c_n**}的前**n**项和为**S_n**，求**S_n**；**

例2、数列｛a_n｝满足 $a_n=\begin{cases}2n+1 & n\text{为偶数}\\(\sqrt{2})^n & n\text{为奇数}\end{cases}$

求数列｛a_n｝的前100项和.

【思考归纳】

黄冈学习网 www.hgxxw.net

分组转化法求和的常见类型

(1)若$a_n=b_n\pm c_n$，且$\{b_n\}$，$\{c_n\}$为等差或等比数列，可采用分组求和法求$\{a_n\}$的前n项和；

(2)通项公式为$a_n=\begin{cases}b_n, n为奇数,\\ c_n, n为偶数,\end{cases}$的数列，其中数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$是等比数列或等差数列，可采用分组求和法求和．

题型二 裂项相消法求和

例3、正项数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：

$$S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0.$$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(2)令 $b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$ ，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，证明：对于任意的$n\in N^*$，都有 $T_n<\frac{5}{64}$.

【思考归纳】

- 利用裂项相消法求和应注意以下两点：
- (1)抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项，也有可能前面剩两项，后面也剩两项；
- (2)将通项裂项后，有时需要调整前面的系数，使裂开的两项之差和系数之积与原通项相等.

题型三 错位相减法求和

例4、设数列$\{a_n\}$满足

$$a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n}{3},n\in\mathbb{N}^*.$$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{n}{a_n}$ ，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

【思考归纳】

- 用乘公比错位相减法求和时，应注意以下两点：
- (1)要善于识别题目类型，特别是等比数列公比为负数的情形；
- (2)在写出“S_n”与“qS_n”的表达式时应特别注意将两式“错项对齐”，以便下一步准确写出“S_n-qS_n”的表达式

题型四 并项法求和

例5、等比数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2，a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且a_1，a_2，a_3中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足：$b_n = a_n + (-1)^n \ln a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n$.

【思考归纳】

形如$a_n=(-1)^n f(n)$类型，可采用两项合并求解，还有周期数列的求和也采取并项法求和.

课后练习

1．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n(n\in N^*)$，则$S_{2012}=$(　　)

A．$2^{2012}-1$　　B．$3\cdot 2^{1006}-3$

C．$3\cdot 2^{1006}-1$　　D．$3\cdot 2^{1005}-2$

2．已知数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{3}+\frac{2}{3},\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4},\cdots,\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{9}{10}$，…，若$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，那么数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$为(　　)

A．$\frac{n}{n+1}$　　B．$\frac{4n}{n+1}$　　C．$\frac{3n}{n+1}$　　D．$\frac{5n}{n+1}$

3.设$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，若$S=f(\frac{1}{2015})+f(\frac{2}{2015})+\cdots+f(\frac{2014}{2015})$，则$S=$__________.

4．等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n-1$，

则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ ＝_____.

5.已知正项数列$\{a_n\}$，其前n项和S_n满足$6S_n=a_n^2+3a_n+2$，且a_1，a_2，a_3是等比数列$\{b_n\}$的前三项．

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)记$T_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$，$n\in N^*$，证明：

$3T_n+1=2b_{n+1}-a_{n+1}(n\in N^*)$．

6.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=3^n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1$，$b_{n+1}=b_n+(2n-1)(n\in\mathbb{N}_+)$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式b_n；

(3)若$c_n=\dfrac{a_n\cdot b_n}{n}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.