



黄冈学习网
www.hgxxw.net

导数中函数零点与交点个数的问題

学习目标

能把涉及到的切线条数、零点个数、极值点的个数等问题都通过转化与化归的思想方法转化为方程的根的个数问题，两曲线的交点个数问题；再利用导数研究函数性质，画出草图数形结合解决。

导数中函数零点与交点个数的主要涉及以下方面

(1) 函数零点或零点存在区间的确定问题，常利用导数研究函数性质并结合零点存在性定理求解；

(2) 函数零点个数问题，方程根的讨论问题，常常合理的转化为两函数的图像交点问题；

(3) 由函数的零点情况确定参数范围问题，常利用函数的性质转化为函数图像求解。

基本题型

要点一 函数零点或零点存在区间的确定问题

例1、已知函数 $f(x) = e^x + x^2 - x - 4$ ，求整数 k 的值，使得函数 $f(x)$ 在区间 $(k, k + 1)$ 上存在零点。



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 求函数的极值，最值等问题都要确定函数的零点或零点存在的区间，解决此类问题往往利用导数判断其单调性，画出函数草图数形结合，再利用函数零点存在性定理求解。

要点二 函数零点个数问题，方程根的讨论问题



黄冈学习网
www.hgxxw.net

例2、已知函数 $f(x) = e^x$ ， $x \in \mathbb{R}$.

证明：曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 有唯一的公共点。

互动探究



黄冈学习网
www.hgxxw.net

保持本例条件不变，若 $x > 0$ ，试讨论曲线 $y = f(x)$ 与
曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数。



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



- 1. 三步解决函数零点，方程解(或曲线公共点)的个数问题
- 第一步：将问题转化为函数的零点问题，进而转化为函数的图像与 x 轴(或直线 $y=k$)在该区间上的交点问题；
- 第二步：利用导数研究该函数在该区间上单调性、极值(最值)、端点值等性质，进而画出其图像；
- 第三步：结合图像求解.
- 2. 证明复杂方程在某区间上有唯一解问题的方法
- 第一步：利用导数证明该函数在该区间上单调；
- 第二步：证明端点值异号.



要点三 由函数的零点情况确定参数范围问题

例3、已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x (a > 0)$. 若 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上恰有两个零点, 求 a 的取值范围.



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 函数零点或函数图象交点问题的求解，一般利用导数研究函数的单调性、极值等性质，并借助函数图象，根据零点或图象的交点情况，建立含参数的方程(或不等式)组求解，实现形与数的和谐统一。

课后练习

1. 若函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) = x_1$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数是 ()

A . 3

B . 4

C . 5

D . 6

2. 设 D 是函数 $y = f(x)$ 定义域内的一个区间, 若存在 $x_0 \in D$, 使 $f(x_0) = -x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“次不动点”, 也称 $f(x)$ 在区间 D 上存在“次不动点”, 若函数 $f(x) = ax^2 - 3x - \frac{5}{2}a +$ 在区间 $[1, 4]$ 上存在“次不动点”, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 0)$

B. $(0, \frac{1}{2})$

C. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(-\infty, \frac{1}{2}]$

3 . 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点 , 则实数 a 的取值范围是_____ .

4 . 设函数 $f(x) = (1 + x)^2 - 2\ln(1 + x)$, 若关于 x 的方程 $f(x) = x^2 + x + a$ 在 $[0, 2]$ 上恰有两个相异实根 , 则实数 a 的取值范围是_____ .



5. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax - a)$, 其中 a 是常数 .

(1) 当 $a = 1$ 时 , 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 ;

(2) 若存在实数 k , 使得关于 x 的方程 $f(x) = k$ 在 $[0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根 , 求 k 的取值范围 .



黄冈学习网
www.hgxxw.net