导数与不等式

学习目标

1．能用导数合理构造函数比较两个数或式的大小，解决不等式恒成立问题．

2．能用导数研究函数的性质，结合转化与化归、数形结合、分类讨论等数学思想解决不等式证明问题．

基本题型

利用导数解决不等式问题主要涉及以下方面

(1)不等式恒成立：基本思路就是转化为求函数的最值或函数值域的端点值问题．

(2)比较两个函数的大小：一般的解决思路是把两个函数作差后构造一个新函数，通过研究这个函数的函数值与零的大小确定所比较的两个函数的大小．

(3)证明不等式：对于只含有一个变量的不等式都可以通过构造函数，然后利用函数的单调性和极值解决．

重难考点

要点一 不等式恒成立问题

例1、已知函数$f(x)=a\ln x+1(a>0)$．在区间$(1，e)$上$f(x)>x$恒成立，求实数a的范围．

【思考归纳】

- 求解不等式恒成立问题时，优先考虑将参数分离出来，将参数范围问题转化为研究新函数的值域问题；若不易分离参数则转化为含参的新函数的值域问题。

要点二 比较两个数或式的大小问题

例2、已知函数$f(x)=e^x$，$x\in\mathbb{R}$.设$a<b$，比较 $f(\frac{a+b}{2})$ 与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小，并说明理由．

【思考归纳】

- 比较两个数的大小：一般的解决思路是把两个函数作差后构造一个新函数，通过研究这个函数的函数值与零的大小确定所比较的两个函数的大小.

要点三 证明不等式问题

例3、设l为曲线C：$y=\dfrac{\ln x}{x}$在点(1,0)处的切线．

(1)求l的方程；

例3、设l为曲线C：$y=\dfrac{\ln x}{x}$在点(1,0)处的切线．

(2)证明：除切点(1,0)之外，曲线C在直线l的下方．

【思考归纳】

- 利用导数方法证明不等式$f(x)>g(x)$在区间D上恒成立的基本方法是构造函数$h(x)=f(x)-g(x)$，然后根据函数的单调性，或者函数的最值证明函数$h(x)>0$，其中一个重要技巧就是找到函数$h(x)$在什么地方可以等于零，这往往就是解决问题的一个突破口．

例4、已知函数$f(x)=a\ln x-ax-3(a\in \mathrm{R})$．

(1)求函数$f(x)$的单调区间；

例4、已知函数$f(x)=a\ln x-ax-3(a\in R)$．

(2)当$a=-1$时，证明：在$(1,+\infty)$上，$f(x)+2>0$；

例4、已知函数$f(x)=a\ln x-ax-3(a\in\mathbf{R})$．

(2)当$a=-1$时，证明：在$(1,+\infty)$上，$f(x)+2>0$；

(3)求证：$\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\ln 3}{3}\cdot\frac{\ln 4}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{\ln n}{n}<\frac{1}{n}$ $(n\geq 2, n\in\mathbf{N}^*)$．

【思考归纳】

- 利用导数证明不等式，要结合所证式子的特点，考虑合理构造新的函数，利用新函数的单调性或最值以及不等式的性质解决不等式的证明问题。

课后练习

1．设函数$f(x)=e^{x}-1-x-ax^{2}$.

(1)若$a=0$，求$f(x)$的单调区间；

(2)若当$x\geq 0$时$f(x)\geq 0$，求a的取值范围．

2. 设函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=f(x)+f'(x)$．

(1)求函数$g(x)$的单调区间和最小值；

(2)讨论$g(x)$与$g\left(\frac{1}{x}\right)$的大小关系；

(3)求实数a的取值范围，使得$g(a)-g(x)<\frac{1}{a}$对任意$x>0$恒成立．

3.已知函数$f(x)=x-\ln(x+a)$的最小值为0，

其中$a>0$.

(1)求a的值；

(2)若对任意的$x\in[0，+\infty)$，有$f(x)\leq kx^2$成立，求实数k的最小值；

(3)证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2(n\in N^{*})$.