



黄冈学习网
www.hgxxw.net

圆锥曲线中的轨迹与方程问题

学习目标

能重点掌握几种常用的求轨迹与方程的方法,并能解决圆锥曲线中的轨迹与方程问题。

基本方法



1. 用直接法求轨迹方程

建立适当的坐标系，设出曲线上任意一点的坐标，找出动点满足的等量关系，化简即得所求曲线方程。

2. 用定义法求轨迹方程

若由题意能判断出动点的运动轨迹能满足某种曲线的定义，则只需设出标准方程并确定出方程中的基本量即可，这也是求轨迹方程的首选方法。

3. 用代入法（相关点法）求轨迹方程

若 A 点的运动与 B 点的运动相关，且 B 点的运动有规律，则找出两点坐标间的关系，用 A 点坐标表示出 B 点坐标，代入 B 点所满足的方程，整理即得 A 点的轨迹方程（代入法的关键在于找到动点和其相关点坐标间的等量关系）。

4. 参数法求轨迹方程

当动点 $P(x, y)$ 坐标之间的关系不易直接找到，也没有相关动点可用时，可考虑将 x, y 均用一中间变量(参数)表示，得参数方程，再消去参数得普通方程。

失误与防范

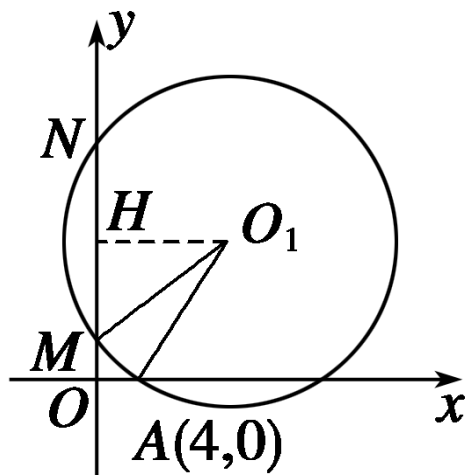
1. 求轨迹方程时，要注意曲线上的点与方程的解是一一对应关系。检验可从以下两个方面进行：一是方程的化简是否是同解变形；二是是否符合题目的实际意义。

2. 求点的轨迹与轨迹方程是不同的要求，求轨迹时，应先求轨迹方程，然后根据方程说明轨迹的形状、位置、大小等。

重难点考点

要点一 用直接法求轨迹方程

例1、已知动圆过定点 $A(4,0)$ ，且在 y 轴上截得弦 MN 的长为8，求动圆圆心的轨迹 C 的方程。



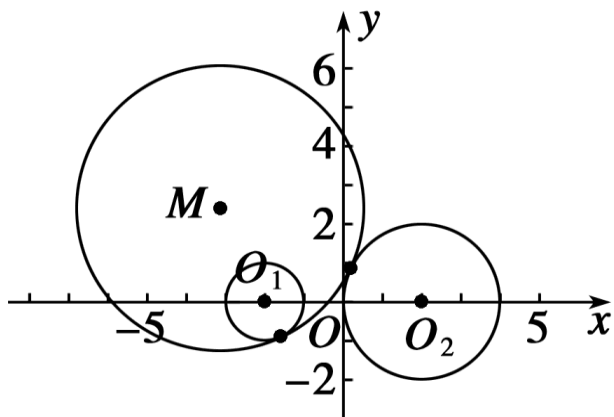
【思考归纳】



- 直接法求曲线方程时最关键的就是把几何条件或等量关系翻译为代数方程，要注意翻译的等价性。通常将步骤简记为建系设点、列式、代换、化简、证明这五个步骤，但最后的证明可以省略。如果给出了直角坐标系则可省去建系这一步。求出曲线的方程后还需注意检验方程的纯粹性和完备性。

要点二 用定义法求轨迹方程

例2、已知两个定圆 O_1 和 O_2 ，它们的半径分别是1和2，且 $|O_1O_2|=4$.动圆 M 与圆 O_1 内切，又与圆 O_2 外切，建立适当的坐标系，求动圆圆心 M 的轨迹方程，并说明轨迹是何种曲线.



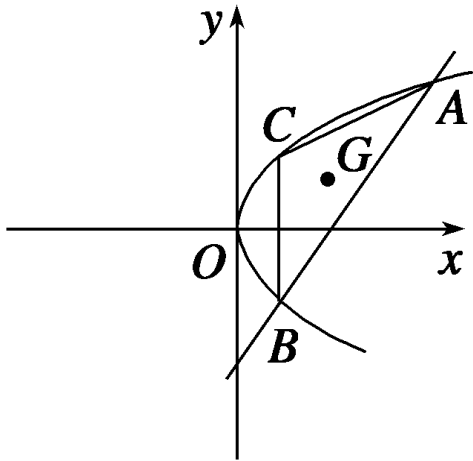
【思考归纳】

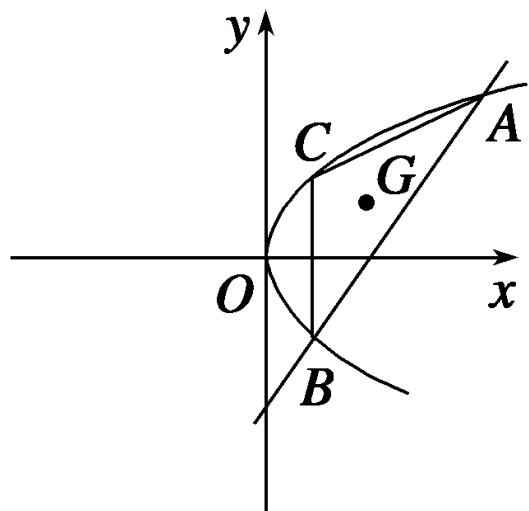


- 求曲线的轨迹方程时，应尽量地利用几何条件探求轨迹的曲线类型，从而再用待定系数法求出轨迹的方程，这样可以减少运算量，提高解题速度与质量。

要点三 用代入法(相关点法)求轨迹方程

例3、设直线 $x - y = 4a$ 与抛物线 $y^2 = 4ax$ 交于两点 A , B (a 为定值), C 为抛物线上任意一点, 求 $\triangle ABC$ 的重心的轨迹方程.





黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



“相关点法”的基本步骤:

(1)设点: 设被动点坐标为 (x, y) , 主动点坐标为 (x_1, y_1) ;

(2)求关系式: 求出两个动点坐标之间的关系式

$$\text{关系式} \begin{cases} x_1 = f(x, y), \\ y_1 = g(x, y); \end{cases}$$

(3)代换: 将上述关系式代入已知曲线方程, 便可得到所求动点的轨迹方程.

要点四 用参数法求轨迹方程

例4、已知动直线 l 过定点 $(0,3)$ ，且是抛物线 $y^2=4x$ 的动弦 P_1P_2 的中垂线，求直线 l 与动弦 P_1P_2 交点 M 的轨迹方程。



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】

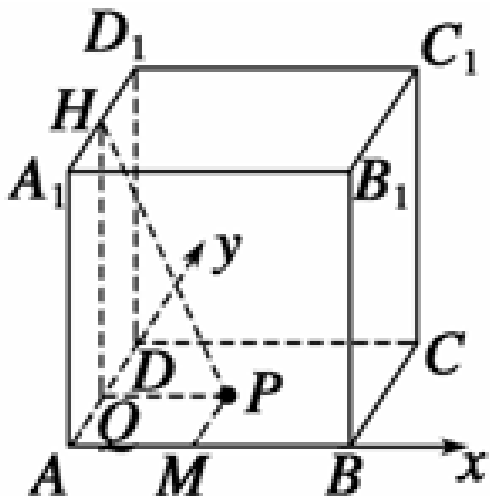


黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 运用参数法求轨迹方程时主要在于设置合适的参数，求出参数方程，最后消参，化为普通方程。要注意消参前后的等价性，即要标明参数对 x 或 y 的限制条件。

课后练习

1. 如图所示，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 M 在 AB 上，且 $AM = \frac{1}{3}AB$ ，点 P 在平面 $ABCD$ 上，且动点 P 到直线 A_1D_1 的距离的平方与 P 到点 M 的距离的平方差为1，在平面直角坐标系 xAy 中，动点 P 的轨迹方程是_____.





2. 点 P 是以 F_1 、 F_2 为焦点的椭圆上一点，过焦点作 $\angle F_1PF_2$ 外角平分线的垂线，垂足为 M ，则点 M 的轨迹是 ()

A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

3. $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-5,0)$ ， $B(5,0)$ ， $\triangle ABC$ 的内切圆圆心在直线 $x=3$ 上，则顶点 C 的轨迹方程是 ()

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1(x > 3)$

D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1(x > 4)$



4. 圆 $O: x^2 + y^2 = 16$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ 为两个定点. 直线 l 是圆 O 的一条切线, 若经过 A 、 B 两点的抛物线以直线 l 为准线, 则抛物线焦点所在的轨迹是 ()

A. 双曲线

B. 椭圆

C. 抛物线

D. 圆

5. 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{2-a} = 1$ 与 x 、 y 轴交点的中点的轨迹方程是 _____.



黄冈学习网
www.hgxxw.net