圆锥曲线中的定点、定值、最值与范围问题

学习目标

圆锥曲线中的定点、定值、范围与最值问题是高考的热点问题,常为压轴题,题目难度大,综合性强. 能抓住这三类问题的解题思路,掌握解题方法，细致分析已知条件,进行转化化归,提高运算能力和运算方法，并最终能熟练解决问题。

基本题型

(1)圆锥曲线中的定点问题，主要是以直线、圆锥曲线为载体,结合其他条件探究直线或曲线过定点.

(2) 圆锥曲线中的定值问题，则是以直线与圆锥曲线的位置关系结合一元二次方程、函数、数列等知识形成交汇问题.

(3) 圆锥曲线中的范围与最值问题，多以直线与圆锥曲线为背景,通过与解析式的求法、函数最值、不等式等知识交汇考查求解范围与最值的技巧与方法.

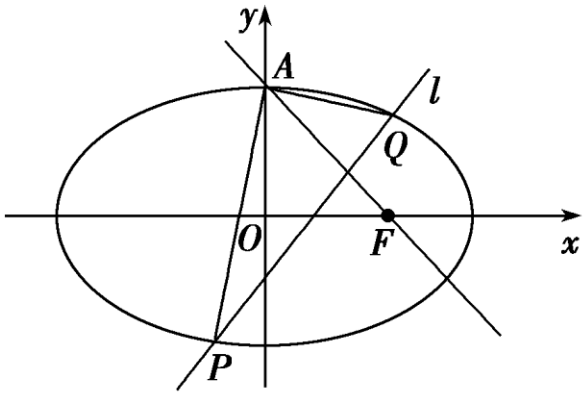
重难考点

要点一　圆锥曲线中的定点问题

例1.如图，已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的上顶点为$A$，右焦点为$F$，直线$AF$与圆$M$：$x^2+y^2-6x-2y+7=0$相切.

(1)求椭圆C的方程；

(2)若不过点A的动直线l与椭圆C相交于P、Q两点，且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，求证：直线$l$过定点，并求出该定点的坐标.



【思考归纳】

- 1．求解直线和曲线过定点问题的基本思路是：把直线或曲线方程中的变量x，y当作常数看待，把方程一端化为零，既然是过定点，那么这个方程就要对任意参数都成立，这时参数的系数就要全部等于零，这样就得到一个关于x，y的方程组，这个方程组的解所确定的点就是直线或曲线所过的定点．
- 2．由直线方程确定定点，若得到了直线方程的点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$，则直线必过定点$(x_0，y_0)$；若得到了直线方程的斜截式：$y=kx+m$，则直线必过定点$(0，m)$．

要点二 圆锥曲线中的定值问题

例2、椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是F_1，F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过F_1且垂直于x轴的直线被椭圆C截得的线段长为1.

(1)求椭圆C的方程；

(2)点P是椭圆C上除长轴端点外的任一点，过点P作斜率为k的直线l，使得l与椭圆C有且只有一个公共点．设直线PF_1，PF_2的斜率分别为k_1，k_2.若$k\neq 0$，试证明 $\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}$为定值，并求出这个定值．

【思考归纳】

- 1．解析几何中的定值问题是指某些几何量(线段的长度、图形的面积、角的度数、直线的斜率等)的大小或某些代数表达式的值等和题目中的参数无关，不依参数的变化而变化，而始终是一个确定的值.
- 2．求定值问题常见的方法有两种：
- ①从特殊入手，先确定“定值”是多少，再进行证明；
- ②将问题转化为代数式，再证明该式是与变量无关的常数或者由该等式与变量无关，令其系数等于零即可得到定值.

要点三 圆锥曲线中的范围与最值问题

例3． (1)已知抛物线$x^2=4y$上有一条长为6的动弦AB，则AB的中点到x轴的最短距离为(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C．1　　D．2

(2)抛物线$y^2=4x$的焦点为F，点$P(x，y)$为该抛物线上的动点，又点$A(-1,0)$，则$\dfrac{|PF|}{|PA|}$的最小值是________

(3)已知F_1，F_2分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P为双曲线右支上的任意一点．若 $\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|}=8a$，则双曲线的离心率的取值范围是(　　)

A．(1,2]　B．[2，+∞)　C．(1,3]　D．[3，+∞)

#【思考归纳】

- 求解最值与范围问题的一般思路是选取一个合适的变量,建立目标函数,根据目标函数的形式或用二次函数、导数,或用三角换元,不等式等方法求最值与范围,其中有两点要注意:一是直线斜率是否存在,二是函数最高次项系数的讨论.
- 解决圆锥曲线的最值与范围问题常见的解法有两种：几何法和代数法.
- (1)若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用图形性质来解决，这就是几何法;
- (2)若题目的条件和结论能体现一种明确的函数关系，则可首先建立起目标函数，再求这个函数的最值，这就是代数法.

课后练习

1.已知抛物线$y=x^2$上有一定点$A(-1,1)$和两动点P、Q，当$PA\perp PQ$时，点Q的横坐标取值范围是（　　）

A．$(-\infty，-3]$　　B．$[1，+\infty)$

C．$[-3,1]$　　D．$(-\infty，-3]\cup[1，+\infty)$

2．A、B是抛物线$y^2=2px(p>0)$上的两点,满足OA⊥OB (O为坐标原点).则直线AB经过一个定点,该定点的坐标是 (　)

A. $(\frac{p}{2},0)$　　B. $(p,0)$　　C. $(2p,0)$　　D. $(4p,0)$

3. E、F是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上的两个动点，$A(1，\frac{3}{2})$，如果直线$AE$的斜率与$AF$的斜率互为相反数，则直线$EF$的斜率为定值，该定值等于 (　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$