利用不等式求最值问题

学习目标

掌握基本不等式、柯西不等式、绝对值不等式，并能熟练运用解决最值问题。

基本题型

(1)利用基本不等式求最值，要注意其必须满足的三个条件:一正二定三相等.

(2) 利用柯西不等式求最值，不能忘记检验等号成立的条件.

(3) 利用绝对值不等式性质求函数的最值，也一定要注意等号成立的条件.

重难考点

要点一 利用基本不等式求最值

例1、（1）$x\in R$ 且 $x\neq -1$，函数 $y=x-1+\dfrac{4}{x+1}$ 的值域为________.

（2）已知$a>0$，求函数$y=\dfrac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}$的最小值.

（3）已知 $x,y\in R^{+}$, 且 $x+y=1$ ，则 $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为________.

（4）已知 $x,y\in R^{+}$，且 $9x+y-xy=0$，则 $x+y$ 的最小值为________.

（5）若对任意$x>1$，$\frac{x-1}{x^2+3x+5}\leqslant a$ 恒成立，则a的取值范围是________.

例2、已知$x>0$，$y>0$，$x+3y+xy=9$，

(1)求xy的最大值．(2)求$x+3y$的最小值；

【思考归纳】

条件最值的求解通常有两种方法：一是消元法，即根据条件建立两个量之间的函数关系，然后代入代数式转化为函数的最值求解；二是将条件灵活变形，利用常数代换的方法构造和或积为常数的式子，然后利用基本不等式求解最值.

利用基本不等式求最值的方法:

1.已知某些变量(正数)的积为定值,求和的最小值.

2.已知某些变量(正数)的和为定值,求积的最大值.

在运用基本不等式解决述问题时要注意“一正、二定、三相等”.创设一个使用基本不等式的情境,常用的有变常数、变系数、拆项等.

另外,对于函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}$ $(a>0,b>0)$定义域内不含实数$\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$的类型的最值问题,要会利用函数的单调性求解.

要点二 利用柯西不等式求最值

例3、(1)已知a，b，m，n均为正数，且$a+b=1$，$mn=2$，则$(am+bn)(bm+an)$的最小值为________.

(2)设a, b, c均为实数，则$\frac{a+b-c}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}}$的最大值为____________.

【思考归纳】

- 利用柯西不等式求最值时，关键构造两组数，并向着柯西不等式的形式进行转化.

要点三 利用绝对值不等式求最值

例4、(1)不等式$|x-4|+|x-3|<a$的解集不是空集，则a的取值范围是________________;

(2)若不等式$|x-4|-|x-3|\leq a$对一切$x\in \mathbf{R}$恒成立, 那么实数a的取值范围是______________.

【思考归纳】

- 利用绝对值不等式求最值，主要是利用三角不等式 $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$ 凑成两个数的和或差为定值，从而求最值。

课后练习

1. 设x，y均为正实数，且 $\frac{3}{2+x}+\frac{3}{2+y}=1$，则$xy$的最小值为(　　).

A．4　　B. $4\sqrt{3}$　　C．9　　D．16

2.已知正实数a，b满足$a+2b=1$，则 $a^2+4b^2+\frac{1}{ab}$ 的最小值为________.

3.对于实数x，y，若$|x-1|\le 1$，$|y-2|\le 1$，则$|x-2y+1|$的最大值为________.

4. 若存在实数x使$|x-a|+|x-1|\leq 3$成立，则实数a的取值范围是__________.

5. 设x，y，$z\in \mathbf{R}$，若$x^2+y^2+z^2=4$，则$x-2y+2z$的最小值为______________时，(x，y，z) =____________.