



黄冈学习网
www.hgxxw.net

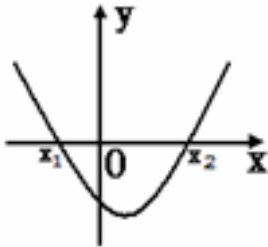
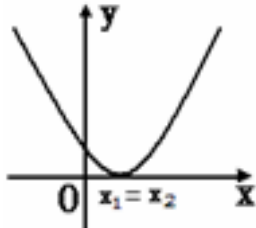
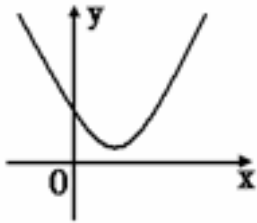
一元二次不等式及其解法

考点梳理

1. 一元一次不等式 $ax > b$: 若 $a > 0$, 解集为 _____ ;
 $a < 0$, 解集为 _____ ; 若 $a = 0$, 当 $b \geq 0$ 时, 解集为
_____, $b < 0$ 时, 解集为 _____.

2.一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系如下表：



判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)	有两相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	方程无实数根
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)的解集	① _____	② _____	③ _____
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)的解集	④ _____	⑤ _____	⑥ _____



3.分式不等式：(1) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow$ _____,

(2) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow$ _____.

重点精讲



题型一 一元二次不等式的解法

例1、解下列不等式：

$$(1) 19x - 3x^2 \geq 6 ; \quad (2) 8x - 1 \leq 16x^2 ;$$

$$(3) 0 < x^2 - x - 2 \leq 4 ; \quad (4) \frac{2x}{x-1} \leq 1$$



黄冈学习网
www.hgxxw.net

【思考归纳】



- 求一元二次不等式解集的一般步骤:
- 1.通过变形化成标准的一元二次不等式的形式(要求二次项系数为正且不等号右边为0).
- 2.先考虑因式分解法,再考虑求根公式求出相应的一元二次方程的根,有三种情况: $\Delta=0$, $\Delta<0$, $\Delta>0$.
- 3.画出对应二次函数的草图.
- 4.结合图形求不等式的解集.



题型二 含参数的一元二次不等式的解法

例2、解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a + 1)x + 1 < 0$.

【思考归纳】



- 解含参数的一元二次不等式的步骤
- (1) 二次项若含有参数，应讨论参数等于0，小于0，还是大于0，然后将不等式转化为二次项系数为正的形式，
- (2) 判断方程实根的个数，讨论判别式 Δ 与0的关系，
- (3) 确定无实根时可直接写出解集，确定方程有两个相异实根时，要讨论两实根的大小关系，从而确定解集形式。

题型三 三个二次的关系

例3、若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 4\}$ ，求不等式 $bx^2 + 2ax - c - 3b < 0$ 的解集.



例4、已知抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1(m \in \mathbb{R})$.

(1)当 m 为何值时，抛物线与 x 轴有两个不同的交点？

(2)若关于 x 的方程 $(m-1)x^2+(m-2)x-1=0$ 的两个不等实根的倒数平方和不大于2，求实数 m 的取值范围.

【思考归纳】



- 三个二次的关系体现了数形结合，以及函数与方程的思想方法。

题型四 不等式恒成立问题



例5、已知不等式 $x + 2 > m(x^2 - 1)$.

(1) 若对于所有的实数 x ，不等式恒成立，求 m 的取值范围；

(2) 若对于 $m \in [-2, 2]$ 不等式恒成立，求实数 x 的取值范围.

【思考归纳】



黄冈学习网
www.hgxxw.net

- 1.解决恒成立问题一定要搞清谁是自变量,谁是参数,一般地,知道谁的范围,谁就是自变量,求谁的取值范围,谁就是参数.
- 2.对于二次不等式恒成立问题,恒大于0就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在x轴上方,恒小于0就是相应二次函数的图象在给定的区间上全部在x轴下方.

课后练习



1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$,

则不等式 $x + (x + 1)f(x + 1) \leq 1$ 的解集是()

- A. $\{ x \mid -1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1 \}$
- B. $\{ x \mid x \leq 1 \}$
- C. $\{ x \mid x \leq \sqrt{2} - 1 \}$
- D. $\{ x \mid -\sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1 \}$

2.已知条件 $p : x^2 - 3x - 4 \leq 0 ;$

条件 $q : x^2 - 6x + 9 - m^2 \leq 0 ;$

若 p 是 q 的充分不必要条件，则 m 的取值范围是()

A . [- 1 , 1]

B . [- 4 , 4]

C . (- ∞ , - 4] \cup [4 , + ∞)

D . (- ∞ , - 1] \cup [1 , + ∞)



3. 若函数 $f(x) = \frac{x-4}{mx^2 + 4mx + 3}$ 的定义域为 R , 则实数 m 的取值范围为_____.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + b$ ($a, b \in R$) 的值域为 $[0, +\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < c$ 的解集为 $(m, m+6)$, 则实数 c 的值为_____.

5. 解关于 x 的不等式 $2x^2 + kx - k \leq 0$.



黄冈学习网
www.hgxxw.net