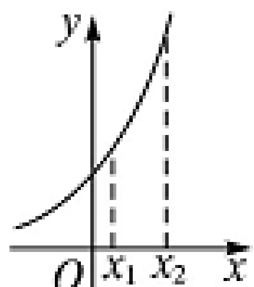
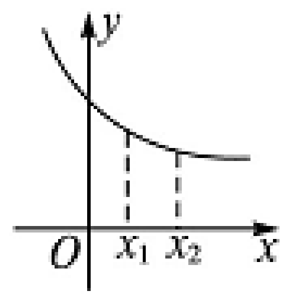
函数的单调性

考点梳理

1．函数的单调性

(1)单调函数的定义

<table>
<tr><th></th><th>增函数</th><th>减函数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">定义</td><td colspan="2">一般地，设函数 $f(x)$的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1，x_2.</td></tr>
<tr><td>当 $x_1<x_2$时，都有__________，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是增函数</td><td>当 $x_1<x_2$时，都有__________，那么就说函数 $f(x)$在区间 D 上是减函数</td></tr>
<tr><td>图象描述</td><td>自左向右看图象是__________</td><td>自左向右看图象是__________</td></tr>
</table>

(2)如果函数$y = f(x)$在某个区间上是__________或__________，则称$y = f(x)$在这一区间具有(严格的)单调性，这一区间叫做$y = f(x)$的单调区间．

2．函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足	
条件	对于任意 $x\in I$，都有__________； 存在 $x_0\in I$，使得__________.	对于任意 $x\in I$，都有__________； 存在 $x_0\in I$，使得__________.
结论	M 为最大值	M 为最小值

重点精讲

题型一 确定函数的单调性或单调区间

例1、已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$ **，其中** $a>0$.

(1)若 $2f(1)=f(-1)$**，求** a **的值；**

(2)证明：当 $a\geq 1$ **时，函数** $f(x)$ **在区间** $[0，+\infty)$ **上为单调减函数．**

【思考归纳】

- 对于给出具体解析式的函数，证明其在某区间上的单调性有两种方法：
- (1)结合定义(基本步骤为取值、作差或作商、变形、判断)证明；
- (2)可导函数则可以利用导数证明．对于抽象函数单调性的证明，一般采用定义法进行．

例2、求下列函数的单调区间：

(1) $y=-x^2+2|x|+1$；**(2)** $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$．

【思考归纳】

- 求函数的单调区间的常用方法
- (1)利用已知函数的单调性，即转化为已知函数的和、差或复合函数，求单调区间.
- (2)定义法：先求定义域，再利用单调性定义.
- (3)图象法：如果$f(x)$是以图象形式给出的，或者$f(x)$的图象易作出，可由图象的直观性

题型二 函数单调性的应用

例3、(1) $f(x)=\begin{cases} a^x, & x>1 \\ (4-\dfrac{a}{2})x+2, & x\leqslant 1, \end{cases}$ 是R上的单调递增函数，

则实数a的取值范围是________．

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0,\end{cases}$ 则满足不等式$f(1-x^2)>f(2x)$的x的取值范围是___________．

例4、已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x},x\in[1,+\infty)$ **.**

(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$ **时，求函数$f(x)$的最小值；**

(2)若对任意$x\in[1，+\infty)$，$f(x)>0$恒成立，试求实数a的取值范围．

【思考归纳】

黄冈学习网 www.hgxxw.net

- 函数单调性的应用主要涉及利用单调性求最值，进行大小比较，解抽象函数不等式，解题时要注意：一是函数定义域的限制；二是函数单调性的判定；三是等价转化思想与数形结合思想的运用.

题型三 抽象函数单调性的证明及应用

例5、函数$f(x)$对任意的m、$n\in R$，都有$f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，并且$x>0$时，恒有$f(x)>1$.

(1)求证：$f(x)$在R上是增函数；

(2)若$f(3)=4$，解不等式$f(a^2+a-5)<2$.

【思考归纳】

1.对于抽象函数的单调性的判断仍然要紧扣单调性的定义，结合题目所给性质和相应条件，对任意x_1，x_2在所给区间内比较$f(x_1)-f(x_2)$与0的大小或$\frac{f\bullet x_1}{f\bullet x_2}$与1的大小$(f(x)>0)$．有时根据需要，需作适当的变形：如$x_1=x_2\cdot\frac{x_1}{x_2}$或$x_1=x_2+x_1-x_2$等．

2．解有关抽象函数不等式问题的步骤：

(1)确定函数$f(x)$在给定区间上的单调性(或奇偶性)；

(2)将函数不等式转化为$f(A)<f(B)$的形式；

(3)运用函数的单调性“去掉”函数的抽象符号“f”，转化成一般的不等式或不等式组；

(4)解不等式或不等式组求得解集．

课后练习

黄冈学习网 www.hgxxw.net

1. 若$f(x)=-x^2+2ax$与 $g(x)=\frac{a}{x+1}$ 在区间[1,2]上都是减函数，则a的取值范围是________．

2. 函数$y=-(x-3)|x|$的递增区间为________．

3. 已知减函数$f(x)$的定义域是实数集R，m、n都是实数．如果不等式$f(m)-f(n)>f(-m)-f(-n)$成立，那么下列不等式成立的是(　　)

A．$m-n<0$　　B．$m-n>0$

C．$m+n<0$　　D．$m+n>0$

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-8ax+3, x<1,\\ \log_a x, x\geqslant 1,\end{cases}$

在R上单调递减，则实数a的取值范围是________．

5.已知$f(x)$是定义在[－1,1]上的奇函数，且$f(1)=1$，若a，$b\in[-1,1]$，当$a+b\neq 0$时，有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$成立．

(1)判断$f(x)$在[－1,1]上的单调性，并证明；

(2)解不等式：$f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$ ；

(3)若$f(x)\leq m^2-2am+1$对所有的$a\in[-1,1]$恒成立，求实数m的取值范围．