一元二次方程根与系数的关系

一元二次方程的根与系数的关系

填写下表：

方程	两个根		两根之和	两根之积	a与b之间关系	a与c之间关系
	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$x^2+3x-4=0$	-4	1	-3	-4	-3	-4
$x^2-5x+6=0$	2	3	5	6	5	6
$2x^2+3x+1=0$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

已知：如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$

的两个根分别是x_1、x_2。

求证：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$　　$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

推导:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

知识要点

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

的两个根分别是 x_1、 x_2，那么：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1 \bullet x_2=\frac{c}{a}$$

这就是一元二次方程根与系数的关系，也叫韦达定理。

口答下列方程的两根之和与两根之积。

1. $x^2-2x-15=0$

2. $x^2-6x+4=0$

3. $2x^2+3x-5=0$

4. $3x^2-7x=0$

5. $2x^2=5$

典例精析

例1、已知方程$5x^2+kx-6=0$的一个根是2，求它的另一个根及k的值.

解：设方程$5x^2+kx-6=0$的两个根

分别是x_1、x_2，其中$x_1=2$.

所以：$x_1 \cdot x_2 = 2x_2 = -\frac{6}{5}$

即：$x_2 = -\frac{3}{5}$

由于 $x_1 + x_2 = 2 + (-\frac{3}{5}) = -\frac{k}{5}$

得：$k=-7$

答：方程的另一个根是$-\frac{3}{5}$，$k=-7$.

例2：方程 $x^2+3kx+2k-1=0$ 的两根互为倒数，求k的值.

解：设方程的两根分别为x_1和x_2，

则：$x_1 \cdot x_2=2k-1$

而方程的两根互为倒数

即：$x_1 \cdot x_2=1$

所以：$2k-1=1$

得：$k=1$

例3、不解方程，求方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根的平方和、倒数和.

解：$x_1+x_2=-\frac{3}{2}, x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$

(1) $\because (x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=(-\frac{3}{2})^2-2\times(-\frac{1}{2})=\frac{13}{4}$

(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=(-\frac{3}{2})\div(-\frac{1}{2})=3$